模块二 基本不等式

第 1 节 基本不等式的常见用法与拼凑技巧（★★☆）

强化训练

1．（2023•福建模拟•★）函数 $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值是（　　）

（A）-2　　（B）1　　（C）2　　（D）3

答案： B

解析： 要求和的最小值，应凑“积定”，分母为 $x+1$，故将前面的 x 也凑成 $x+1$，

由题意，$y=x+\dfrac{1}{x+1}=(x+1)+\dfrac{1}{x+1}-1\ge 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}}-1=1$，取等条件是 $x+1=\dfrac{1}{x+1}$，即 $x=0$，

所以 $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值是 1.

2．（2023•全国模拟•★）已知 $0<x<1$，则 $x(4-3x)$ 的最大值为_____.

答案： $\dfrac{4}{3}$

解析： 要求积的最大值，考虑凑出和为定值，在外面的 x 上乘以 3 即可，

由题意，$x(4-3x)=\dfrac{1}{3}\times 3x(4-3x)\le\dfrac{1}{3}\cdot[\dfrac{3x+(4-3x)}{2}]^2=\dfrac{4}{3}$，

当且仅当 $3x=4-3x$，即 $x=\dfrac{2}{3}$ 时取等号，所以 $x(4-3x)$ 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$.

3．（★★）设 $0<x<2$，则函数 $f(x)=x(2-x)^2$ 的最大值是_____.

答案： $\dfrac{32}{27}$

解析： 本题当然可以通过求导分析单调性来求最值，但若能凑成和为定值，则可快速求出积的最大值，

由题意，$f(x)=x(2-x)^2=\dfrac{1}{2}\times 2x(2-x)(2-x)\le\dfrac{1}{2}\times[\dfrac{2x+(2-x)+(2-x)}{3}]^3=\dfrac{32}{27}$，

当且仅当 $2x=2-x$，即 $x=\dfrac{2}{3}$ 时取等号，所以 $f(x)_{\max}=\dfrac{32}{27}$.

4．（★★）已知 x，y 均为正数，且 $2^{x-6}=(\dfrac{1}{4})^y$，则 xy 的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{9}{2}$　　（B）$\dfrac{9}{8}$　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{9}{4}$

答案： A

解析： 题干给了一个等式，应先将其化简，可把右侧的底数化为 2 再看，

由题意，$2^{x-6}=(\frac{1}{4})^{y}=(2^{-2})^{y}=2^{-2y}$，所以 $x-6=-2y$，故 $x+2y=6$ ①，

有了和为定值，要求积的最大值，直接用均值不等式即可，所以 $6=x+2y\geq 2\sqrt{x\cdot 2y}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}$，

化简得：$xy\leq\frac{9}{2}$，当且仅当 $x=2y$ 时取等号，结合式①可得 $x=3$，$y=\frac{3}{2}$，故 xy 的最大值为 $\frac{9}{2}$.

5.（2022·九江模拟·★★）已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为_____.

答案：$\frac{9}{2}$

解析：观察发现可用“1”的代换凑出积为定值，

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 1=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})\cdot 2\times\frac{1}{2}=(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})(a+b)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4)=\frac{1}{2}(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5)\geq\frac{1}{2}(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+5)=\frac{9}{2}$，

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$ 时取等号，结合 $a+b=2$ 可得 $\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=\frac{4}{3}\end{cases}$，故 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

6.（2022·连云港模拟·★★）已知 $a>0$，$b>0$，$a+\frac{1}{b}=1$，则 $\frac{b}{a}$ 的最小值为_____.

答案：4

解析：先将 $\frac{1}{b}$ 换元，把已知的等式化简，设 $c=\frac{1}{b}$，则 $c>0$，且 $a+\frac{1}{b}=1$ 即为 $a+c=1$，$\frac{b}{a}=\frac{1}{ac}$，

故问题等价于求 ac 的最大值，已有和为定值，直接用均值不等式即可，

$1=a+c\geq 2\sqrt{ac}$，所以 $0<ac\leq\frac{1}{4}$，故 $\frac{1}{ac}\geq 4$，当且仅当 $a=c=\frac{1}{2}$ 时取等号，因为 $\frac{b}{a}=\frac{1}{ac}$，所以 $(\frac{b}{a})_{\min}=4$.

7.（2023·全国模拟·★★★）已知 $m>n>0$，且 $m+n=1$，则 $\frac{6}{m-n}+\frac{1}{3n}$ 的最小值为_____.

答案：$\frac{32}{3}$

解析：看到分子为两个正常数，想到将分母整体换元，看能否转化为“1”的代换基本模型来处理，

设 $\begin{cases}a=m-n\\ b=3n\end{cases}$，则 $\begin{cases}m=a+\frac{b}{3}\\ n=\frac{b}{3}\end{cases}$，由 $m>n>0$ 可得 $a>0$，$b>0$，

因为 $m+n=1$，所以 $a+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}=1$，整理得：$3a+2b=3$ ①，

故 $\frac{6}{m-n}+\frac{1}{3n}=\frac{6}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{6}{a}+\frac{1}{b})\cdot 1=(\frac{6}{a}+\frac{1}{b})\cdot 3\times\frac{1}{3}=(\frac{6}{a}+\frac{1}{b})(3a+2b)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(18+\frac{12b}{a}+\frac{3a}{b}+2)$

$=\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{20}{3}\geq 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+\frac{20}{3}=\frac{32}{3}$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$ 时取等号，结合①可得此时 $a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{3}{8}$，

代入$\begin{cases} m=a+\dfrac{b}{3} \\ n=\dfrac{b}{3} \end{cases}$得$\begin{cases} m=\dfrac{7}{8} \\ n=\dfrac{1}{8} \end{cases}$，满足条件，所以$\dfrac{6}{m-n}+\dfrac{1}{3n}$的最小值为$\dfrac{32}{3}$.

【反思】涉及两个分式之和的最小值问题，尤其是分子均为正常数时，可尝试将分母整体换元，看能否转化为“1”的代换基本模型来处理.

8.（2023·湖南株洲模拟·★★★）已知$0<x<1$，若关于x的不等式$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{1-x}<m^2-8m$有解，则实数$m$的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-9)\cup(1,+\infty)$　　（B）$(-1,9)$　　（C）$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$

答案：C

解析：问题等价于$(\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{1-x})_{\min}<m^2-8m$，故先求$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{1-x}$的最小值，注意到分母和为定值，故可将分母换元，转化成“1”的代换基本模型来处理，

设$a=x$，$b=1-x$，则$0<a<1$，$0<b<1$，且$a+b=1$，

所以$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b})\cdot 1=(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b})(a+b)=4+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}+5\ge 2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+5=9$，

当且仅当$\dfrac{4b}{a}=\dfrac{a}{b}$时取等号，此时$a=2b$，结合$a+b=1$可得$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$，故$(\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{1-x})_{\min}=9$，

所以$9<m^2-8m$，故$m^2-8m-9>0$，解得：$m<-1$或$m>9$.

9.（★★★）已知正实数x，y满足$x+y=1$，则$\log_2 x+\log_4 y$的最大值是_____.

答案：$1-\dfrac{3}{2}\log_2 3$

解析：$\log_2 x+\log_4 y=\log_2 x+\log_{2^2} y=\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 y=\log_2(x\sqrt{y})=\log_2\sqrt{x^2y}$　①，

先求x^2y的最大值，结合$x+y=1$知可将x^2y化为$\dfrac{1}{2}x\cdot x\cdot 2y$，凑出和为定值，用三元均值不等式求最值，

$x^2y=\dfrac{1}{2}x\cdot x\cdot 2y\le\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{x+x+2y}{3})^3=\dfrac{1}{2}\cdot[\dfrac{2(x+y)}{3}]^3=\dfrac{4}{27}$，取等条件是$x=2y$，又$x+y=1$，所以$x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$，

故$(x^2y)_{\max}=\dfrac{4}{27}$，代入①知$(\log_2 x+\log_4 y)_{\max}=\log_2\sqrt{\dfrac{4}{27}}=\log_2\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\log_2 2-\log_2 3^{\frac{3}{2}}=1-\dfrac{3}{2}\log_2 3$.

10.（2023·天津模拟·★★★）若$b>a>1$，且$3\log_a b+2\log_b a=7$，则$a^2+\dfrac{3}{b-1}$的最小值为_____.

答案：$2\sqrt{3}+1$

解析：注意到$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$，故所给等式可化为关于$\log_a b$的方程，解出$\log_a b$，将$a$和$b$的关系化简，

因为$3\log_a b+2\log_b a=7$，所以$3\log_a b+\dfrac{2}{\log_a b}=7$，故$3(\log_a b)^2-7\log_a b+2=0$，解得：$\log_a b=2$或$\dfrac{1}{3}$，

又$b>a>1$，所以$\log_a b>1$，从而$\log_a b=2$，故$a^2=b$，可用这一关系式将目标式消元，再凑积定，

所以$a^2+\frac{3}{b-1}=b+\frac{3}{b-1}=(b-1)+\frac{3}{b-1}+1\ge 2\sqrt{(b-1)\cdot\frac{3}{b-1}}+1=2\sqrt{3}+1$，

取等条件是$b-1=\frac{3}{b-1}$，解得：$b=\sqrt{3}+1$，满足题意，故$(a^2+\frac{3}{b-1})_{\min}=2\sqrt{3}+1$.

11.（2022·广东湛江二模·★★★）若$a,b\in(0,+\infty)$，且$\sqrt{a}+\frac{4}{b}=9$，则$b+\frac{\sqrt{a}}{a}$的最小值为_____.

答案：1

解析：所给等式为根式与分式的混合，结构较复杂，先通过换元将其化简，

设$x=\sqrt{a}$，$y=\frac{4}{b}$，则$x>0$，$y>0$，且$x+y=9$，$b+\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{4}{y}+\frac{1}{x}$，这样就又变成了“1”的代换基础模型，

所以$b+\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{4}{y}+\frac{1}{x}=(\frac{4}{y}+\frac{1}{x})\cdot 1=(\frac{4}{y}+\frac{1}{x})\cdot 9\times\frac{1}{9}=(\frac{4}{y}+\frac{1}{x})(x+y)\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(\frac{4x}{y}+4+1+\frac{y}{x})$

$=\frac{1}{9}(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}+5)\ge\frac{1}{9}(2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+5)=1$，

取等条件是$\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$，结合$x+y=9$可得$\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$，从而$a=9$，$b=\frac{2}{3}$，满足题意，故$b+\frac{\sqrt{a}}{a}$的最小值为1.

【反思】当所给条件较复杂，不易看出如何变形凑定值时，不妨换元，将条件化简，往往可使问题明朗化.